MIDDLE POMERANIAN SCIENTIFIC SOCIETY OF THE ENVIRONMENT PROTECTION
ŚRODKOWO-POMORSKIE TOWARZYSTWO NAUKOWE OCHRONY ŚRODOWISKA

Annual Set The Environment Protection
Rocznik Ochrona Środowiska

Volume/Tom 15. Year/Rok 2013 ISSN 1506-218X 39–58

Filtration of Mixtures Forming Compressible Sediments

Tadeusz Piecuch, Jacek Piekarski, Grażyna Malatyńska
Koszalin University of Technology

1. Introduction

Standard theoretical analysis of the generally approached filtration process is based on Darcy's equation describing the flow of fluid through a porous medium [4–9, 11–14, 16, 50–57]. Naturally, the flow of fluid through porous media, which is the flow of a single-phase fluid, is not yet filtration [29–32].

Filtration is a process in which a mixture of a solid phase and a liquid phase flow through a porous barrier, with this process involving the retention of the solid phase in the barrier or on the barrier, or both. At the same time, the liquid phase that passes through the porous barrier is the product of filtration which is most often referred to in literature on the subject as filtrate or eluate. The other product obtained through the filtration process is the solid phase (granulate forming a mixture with the liquid) retained inside the pores of the filtration medium, or on the filtration medium, and this product is referred to in literature on the subject as the sediment. In practice, however, in the case of so-called deposit filtration, most often gravity filtration, where the porous barrier is formed by a layer of sand or gravel, the solid phase component flowing in the mixture through such a barrier is often retained inside the barrier, in the pores of the medium layer (colmatage) and the remaining part of the solid phase forms a sediment on the porous medium [23, 24, 33–37, 43–49].

The short analysis of different variants of the filtration process presented above already shows that it is a complex, multi-variant process and that it should be analyzed separately depending on the filtration type also from the cause and effect perspective of the dependency mechanism identified.

2. Filtration with sediment storage on the filtration mesh

In the present work, we will analyze the process of filtration of a mixture of a solid and a liquid flowing through a filtration mesh from the theoretical point of view. This type of filtration process is characteristic for filtration devices, such as: vacuum filters, filtering presses, and pressure filters, as well as, to a lesser extent, centrifuge filters [10, 17–22, 25–27].

Darcy's general equation describing the flow of fluid through a porous medium has the following form:

$$\dot{V}=\Delta P\cdot R^{-1} \tag{1}$$

An analogous equation adapter by Piecuch [25–28, 31, 32] to the filtration process, in which the general filtration medium resistance is the denominator, has the formula presented below:

$$\dot{V}=\frac{\Delta P}{t'\frac{\mu}{A_F}+\frac{\mu}{b_O}\Delta P^{so}\frac{V_N\beta_N}{A_F^2(1-\varepsilon_O)\rho_S}} \tag{2}$$

where the denominator which describes the filtration medium resistance is the sum of two components that constitute the denominator.

The first component is the resistance of the filtration mesh, $R_{1,}$ formulated as follows:

$$R_1=t'\frac{\mu}{A_F} \tag{3}$$

The second component is the sediment resistance, $R_{2,}$ that accumulates on the filtration mesh:

$$R_2=t'\frac{\mu}{b_O}\Delta P^{so}\frac{V_N\beta_N}{A_F^2(1-\varepsilon_O)\rho_S} \tag{4}$$

In the relevant equation (4), the formula introduced earlier to Darcy's equation and expressing the permeability K is used in the form of an empirical equation as follows:

$$K=\frac{b_O}{\Delta P^{so}} \tag{5}$$

Permeability K is used in standard analysis of the process of fluid flow through a porous medium and, thus, also in the analysis of filtration processes, as a parameter in the general equation describing the resistance R of the porous medium formulated as follows:

$$R=\alpha\frac{L}{A_F}=\frac{\mu}{K}\frac{L}{A_F} \tag{6}$$

Of course general resistance R in the equation (6) formulated above was used after transforming the equation describing filtration sediment resistance R_2.

It is characteristic here that in the formulation of the empirical equation (5) describing the permeability K, the pressure ΔP in the denominator expresses the so-called squeezing pressure [4], that is – the filtration pressure drop in the sediment.

The assumption stated above constitutes a firm basis for the current standard filtration theory based on Darcy's equation by his disciples – Kozeny and Carman, and then repeated by many other scientists, including [5–11, 50–57], as well as in Polish literature on the subject by, for example, Ciborowski [4]. The authors of the present work modified the formulation of the empirical equation (5) in their consideration in such a way that the pressure in the denominator is assumed to be the general filtration pressure which means the pressure that constitutes a specific moving force of the process acting on the filtration surface – constituted here by the surface of the filtration mesh. Of course, this means that the value of the filtration constant b_0 in the numerator of the equation (5) will be slightly different than the value obtained from the formula of the equation (5) in which the pressure in the denominator expresses the so-called squeezing pressure [4].

In relation to the assumption presented above, the Authors of the present work also used it in another work regarding filtration through a filtration mesh with the formulation of compressible sediments [40] – to which we would like to refer the reader. According to the Authors, such a formulation of the pressure in the equation (5), assuming that it is the so-called initial moving pressure in the process, makes it possible to calculate the efficiency of the filtration process through obtaining the general differential equation of filtration and then to integrate the equation for different values of the compressibility factor, that is generally for different compressible sediments.

Applying the assumption regarding the pressure present in the empirical formulation (5) directly, the Authors demonstrated in the work [40] how the general equation of filtration can be solved directly after such a formulation is introduced, according to the following formula:

$$\dot{V}=\frac{\Delta P}{t'\frac{\mu}{A_F}+\frac{\mu}{b_O}\Delta P^{so}\frac{V_N\beta_N}{A_F^2(1-\varepsilon_O)\rho_S}} \tag{7}$$

Formulating the equation (7) as a differential equation for two particular variants of filtration, that is: when the flow rate is a variable and the pressure is constant and when the pressure fluctuates and the flow rate is constant for different values of the compressibility factor of the filtration sediment accumulated on the filtration mesh.

According to the standard filtration theory, as demonstrated in Polish literature on the subject by, for example, Ciborowski [4], the problem is solved in a different way, which is – first, by calculating the general resistance of the filtration sediment, in accordance with the formula (6), then by introducing its function form from the empirical equation (5) in the place of the permeability factor K in the equation.

Thus, after the transformation, we obtain the equation of resistance R (in this case, the sediment resistance R_2) with the general form of:

$$R_2=\frac{\mu}{b_O}\Delta P^{so}\frac{L}{A_F} \tag{8}$$

where pressure means the co-called sediment squeezing pressure [4].

The equation (8) is then formulated as a differential equation as the differential of the pressure fluctuation in relation to the thickness of the sediment layer L . The total sediment resistance, in accordance with the equation R_2, is obtained on this basis after integrating this equation with the limit of L=0 and $p=\Delta p_0$ on the sediment surface (from the side of the filtration mesh) to the sediment surface from the fluid side, that is in the integration limit of L=L and p=0, as in the formula below:

$$R_2 = \frac{\mu}{b_O}(1 - s_O)\Delta P^{so}\frac{L}{A_F} \tag{9}$$

The relevant detailed derivation of the equation (9) on the basis of the differential formulation of the pressure in relation to the thickness of the sediment layer in the equation (8) can be found in the study [44]. While considering and analyzing the filtration process from the point of view of standard filtration theory, it is this form of the equation (9) that is derived only from the general filtration equation to obtain the formula:

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{t'\frac{\mu}{A_F} + \frac{\mu}{b_O}(1 - s_O)\Delta P^{so}\frac{L}{A_F}} \tag{10}$$

where the pressure in the denominator means the so-called squeezing pressure [4] and it is not the same pressure value as the one used in the numerator in equation (10).

However, if the assumption of the Authors (the same one made, among others, in the work [40]) is accepted, and it is therefore assumed that the denomination of the equation (5) contains the moving pressure of the process and not the squeezing pressure, then the filtration equation obtained (10) after general transformations like the ones presented above will contain the same parameter of the moving pressure of the filtration process ΔP both in the denominator and in the numerator.

Of course, the value of the constant b_0 determined on empirical basis will be different in such a case than when as proposed by the Authors – the assumption that the pressure value in the denominator of the equation (10) stands for the squeezing pressure, and not the moving pressure of the process, is accepted.. It should be underlined that if the equation (5) constituting the basis for the argument is an empirical equation, defining the pressure parameter is one of the basic assumptions of the Authors of the analysis, and then the consequence of this reference applies in the interpretation of particular equation transformations describing the process. If, then, the equation (9) is an independent equation of filtration sediment resistance introduced into another filtration equation in the formula (10), such an equation describing the volume efficiency (the flow) of the filtration process can be presented as a differential formula independently, both for the filtration process in which the pressure value is constant and for the filtration process in which the flow value is constant, which means that the pressure fluctuates (that is in the form of a formula relating the pressure differential to the time differential dp/dt).

Let us then try to present such possible solutions of the equation (10) as a differential equation when the pressure changes in relation to the duration of the process for filtration sediments with different values of the compressibility factor s_O.

3. Particular solutions of the differential filtration equation for compressible sediments

The basis for the consideration is, thus, the general formula in accordance with the equation (10) presented for the filtration process with the accumulation of compressible sediment on the filtration mesh, with the simplified assumption that the whole volume of the suspension (V_N) available in the filtration process, for example, vacuum filtration or pressure filtration [1–3, 23, 24, 33–39], will be retained on the filtration mesh ($V_N\beta_N$), which means that filtrate density will be equal to 0. Thus, the equation (10) will take the following form:

$$\dot{V}=\frac{\Delta P}{t'\frac{\mu}{A_F}+\frac{\mu}{b_O}(1-s_O)\Delta P^{s_O}\frac{V_N\beta_N}{A_F^2(1-\varepsilon_O)\rho_S}} \tag{11}$$

In order to simplify the mathematical operations, some new constant values, from the equation presented above, will be denoted as the constant A of the following form:

$$A=t'\frac{\mu}{A_F} \tag{12}$$

Then, the constant B will have the following form (13):

$$B=s_O \tag{13}$$

and the constant C will have the following form:

$$C=\frac{\mu}{b_O}\frac{V_N\beta_N}{A_F^2(1-\varepsilon_O)\rho_S} \tag{14}$$

Applying the simplifications presented above, the solution of the general differential equation (11) of the filtration process with fluctuating pressure can be presented in the form of the following integral:

$$I=\int \frac{dx}{A+C(1-B)x^B},\ 0<B\leq 1 \tag{15}$$

where A, C – certain constants.

Let us analyze particular solutions of the integral expressed by means of the equation (15).

3.1. For B=1, the integral will have the form:

$$I=\int \frac{dx}{A}=\frac{1}{A}\int dx=\frac{1}{A}x+D=F(x) \tag{16}$$

where D is the constant of integration.

3.2. For B=0,5; xB= x0,5=$\sqrt{x}$, the integral (15) will have the form:

$$I=\int \frac{2dx}{2A+C\sqrt{x}} \tag{17}$$

Substituting $\sqrt{x}=t$, we obtain $x=t^2$, and, thus dx=2tdt, and in this way the integral (17) of an irrational function is transferred into an integral of a rational function:

$$I=4\int \frac{t}{2A+Ct}dt \tag{18}$$

The integrand f(t), which is an improper rational function, has the following formula:

$$f(t)=\frac{t}{2A+Ct}=\frac{1}{C}-\frac{2A}{C}\frac{1}{2A+Ct} \tag{19}$$

And, thus, after integrating both sides of the equation, we obtain the following formula:

$$\int \frac{t}{2A+Ct}dt=\frac{1}{C}t-\frac{2A}{C^2}\ln|2A+Ct| \tag{20}$$

Finally, including the result (20) in the integral (18), and using the original variable x, we obtain the integral of the following formula:

$$I=\int\frac{2dx}{2A+C\sqrt{x}}=\frac{4}{C}\sqrt{x}-\frac{8\cdot A}{C^2}\ln\left|2A+C\sqrt{x}\right|+D \tag{21}$$

where D is the constant of integration which can be determined on the basis of the original condition.

In particular, if the limit interior of integration is established and equal to a=0, and the limit superior of integration is a variable, then we obtain the solution of the filtration equation which has the following form:

$$F(x)=\int_0^x\frac{2du}{2A+C\sqrt{u}}=\frac{4}{C}\sqrt{x}-\frac{8\cdot A}{C^2}\ln\left|2A+C\sqrt{x}\right|+\frac{8A}{C^2}\ln(2A) \tag{22}$$

3.3. For B=2/3; $x^B=x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}$ the integral (15) takes the following form:

$$I=\int\frac{3dx}{3A+C\sqrt[3]{x^2}} \tag{23}$$

Through substituting $\sqrt[3]{x}=t$, we obtain $x=t^3$, $dx=3t^2dt$, and the integral of the irrational function (23) is transformed into an integral of a rational function:

$$I=9\int\frac{t^2}{3A+Ct^2}dt \tag{24}$$

An integral of this type is calculated by expressing the integrand f(t), which is an improper rational function, as follows:

$$f(t)=\frac{t^2}{3A+Ct^2}=\frac{1}{C}-\frac{3A}{C}\frac{1}{3A+Ct^2} \tag{25}$$

Including the distribution (25) in the integral (24) and using the formula:

$$\int\frac{dt}{k^2+t^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{k}\right)\ \text{dla}\ k>0 \tag{26}$$

we obtain:

$$\int\frac{t^2}{3A+Ct^2}dt=\frac{1}{C}t-\frac{\sqrt{3A}}{C\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{C}{3A}}\,t\right)+D \tag{27}$$

After including the result in the equation (24) and substituting $t=\sqrt[3]{x}$ we obtain the final integral (23) of the following formula:

$$I=\int\frac{3dx}{3A+C\sqrt[3]{x^2}}=\frac{9}{C}\sqrt[3]{x}-\frac{9\sqrt{3A}}{C\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{C}{3A}}\sqrt[3]{x}\right)+D \qquad (28)$$

where D is the constant of integration, and the constants A, C are positive numbers.

In particular, if the limit interior of integration is established and equal to a=0, and the limit superior of integration is a variable, then we obtain the general solution of the filtration equation which has the following form:

$$F(x)=\int_0^x\frac{3du}{3A+C\sqrt[3]{u^2}}=\frac{9}{C}\sqrt[3]{x}-\frac{9\sqrt{3A}}{C\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{C}{3A}}\sqrt[3]{x}\right) \qquad (29)$$

3.4. For B=1/3; $x^B=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ the integral (15) takes the form:

$$I=\int\frac{3dx}{3A+2C\sqrt[3]{x}} \qquad (30)$$

By substituting $\sqrt[3]{x}=t$, we obtain $x=t^3$, and $dx=3t^2dt$ and the integral (30) is transformed into an integral of a rational function with the following form:

$$I=\int\frac{3dx}{3A+2C\sqrt[3]{x}}=9\int\frac{t^2}{3A+2Ct}dt \qquad (31)$$

The integrand f(t) is an improper rational function, and thus, by dividing the numerator by the denominator, we can denote it in the following form:

$$f(t)=\frac{t^2}{3A+2Ct}=\frac{1}{2C}t-\frac{3A}{4C^2}+\frac{9A^2}{4C^2}\frac{1}{3A+2Ct} \qquad (32)$$

After including the distribution (32) in the integral (31) and integrating both sides of the equation, we can obtain the following form of the integral on the right side of the equation:

$$I=\frac{9}{4C}t^2-\frac{27A}{4C^2}t+\frac{81A^2}{8C^3}\ln|3A+2Ct|+D \tag{33}$$

Next, by using the original variable, ergo by substituting $t=\sqrt[3]{x}$, we obtain the general integral of the following form:

$$I=\int\frac{3dx}{3A+2C\sqrt[3]{x}}=\frac{9}{4C}\sqrt[3]{x^2}-\frac{27A}{4C^2}\sqrt[3]{x}+\frac{81A^2}{8C^3}\ln\left|3A+2C\sqrt[3]{x}\right|+D \tag{34}$$

where D is the constant of integration.

In particular, if the limit interior of integration is established and equal to a=0 and the limit superior of integration is a variable, then the integral (30) for B=2/3 is expressed by means of the following function:

$$\begin{aligned}F(x)=\int_0^x\frac{3du}{3A+2C\sqrt[3]{u}}=\frac{9}{4C}\sqrt[3]{x^2}-\frac{27A}{4C^2}\sqrt[3]{x}+\\ \frac{81A^2}{8C^3}\ln\left|3A+2C\sqrt[3]{x}\right|-\frac{81A^2}{8C^3}\ln(3A)\end{aligned} \tag{35}$$

4. Conclusion

Summing up the multi-variant solution of the general differential equation of the filtration process presented above for fluctuating filtration pressure and different compressibility values of the filtration sediment accumulating on the filtration mesh (bearing in mind the previous assumption that the physical compressibility factor s_O, denoted mathematically as B, that is the assumption that if 0<B<1, which means that compressibility takes the form of a numerical value greater than zero and lower than one, then B=m/n, where m<n, and, thus, $x^B=x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}$), then the integral (15) takes the following form:

$$I=\int\frac{ndx}{nA+(n-m)C\sqrt[n]{x^m}} \tag{36}$$

The integral (36) of the irrational function is calculated through the substitution: $\sqrt[n]{x}=t$, that is $x=t^n$, and thus $dx=n\cdot t^{n-1}dt$, and then transformed into the integral of a rational function:

$$I=\int\frac{ndx}{nA+(n-m)C\sqrt[n]{x^m}}=n^2\int\frac{t^{n-1}}{nA+(n-m)Ct^m}dt \tag{37}$$

Thus, in the general case, the integrand takes the form:

$$f(t)=\frac{t^{n-1}}{nA+(n-m)Ct^m} \tag{38}$$

It is an improper rational function, as $n-1\geq m$, which means that if we divide the numerator by the denominator, we can denote it as a polynomial and as a proper rational function, and then we integrate it in accordance with the common rules of integrating rational functions (that is simple fractions of the first kind or simple fractions of the second kind). The result of the integral on the right side of the equation (37) is always a function which takes the form of a sum of a polynomial, a natural logarithm or an arc tangent (e.g. the results denoted with the formulas (20), (27), (33)). Applying the substitution $t=\sqrt[n]{x}$, we obtain the solution of the integral (36).

However, for many sediment compressibility values s_O, denoted mathematically as B, that fulfill the condition of $0<B\leq 1$, the general equation (15), which is the general solution of the filtration equation, and thus the equivalent of the physical formula (11), cannot be expressed by means of known functions, which means that we are not able to provide the primitive integral F(x) for the integrand function of the following form:

$$f(x)=\frac{1}{A+C(1-B)x^B} \tag{39}$$

There are, however, many numerical procedures that make it possible to calculate the approximate value of the integral of the generic type in accordance with the formula (15) (e.g. the trapezoidal rule, Simpson's rule, etc.). Many computer programs, e.g. Mathematica, Mathcad, Maple or Matlab, are able to calculate numerical values of integrals. CAS programs are able to perform symbolic integrations, which means that they provide analytical expressions in the results. It is therefore recommended to use those programs as they make it possible to focus on the essence of the problem instead of arduous calculations, saving many hours of laborious algebraic calculations as well as avoiding mistakes which are, unfortunately, frequently made [41–49].

Certain general conclusions for the analysts of the filtration process – in this case, the process of filtration through a filtration mesh with the formulation of compressible sediment on the mesh in the course of the process – can be derived from the theoretical analyses performed. These are as follows:

1. It is not possible to establish a single formula of the general filtration equation in which the sediment compressibility parameter will be present in the general physical notation (here $B=s_O$), in which it will be possible to directly substitute any values of the compressibility factor s_O, within the range from zero to one, and determine the flow of the medium through such a porous barrier – in the present case, a filtration mesh.
2. In the case of the filtration process with the formulation of compressible sediments on the filtration mesh, in order to use the general formula of the differential filtration equation, one must first solve the equation every time through its integration after substituting a specific value of the compressibility factor ($s_O=B$) into the equation. The final physical formulas of those solutions for selected values of compressibility s_O are presented in table 1.
3. Before possible application of the general differential equation of filtration as the original equation on the basis of which we want to calculate the flow (volumetric delivery), the value of the constant b_0 must first be established from the empirical formula (5) in order to determine the value of the permeability parameter K; which is the permeability parameter whose value must be known.
4. Determining the values of constant factors present in the formula of the general filtration equation (11) (that is t', b_0) will be the subject of the analysis performed by the Authors of the present work for particular, typical mixtures which are used in the current engineering practice and it will constitute the subject of their subsequent publications as the continuation of their basic research on the filtration process.
5. The theoretical analysis of the process of filtration of compressible sediments, performed above, clearly demonstrates that using the general differential equation of the filtration process in practice through solving it, namely through integrating it with the assumed (that is, practically known value of the compressibility factor $s_O=B$), is

nevertheless very difficult, and it therefore does not offer promising prospects of its actual application by the designers of this equation.

Table 1. Physical formulas of the equation of the filtration process with the formulation of compressible sediments on the filtration mesh for selected values of the compressibility factor s_O
Tabela 1. Fizykalne zapisy równań procesu filtracji z tworzeniem osadów ściśliwych na siatce filtracyjnej w zależności od wartości wybranych współczynników ściśliwości s_O

Compress-ibility factor s_O	Equation
1/2	$\dot{V}=4\dfrac{(1-\varepsilon_O)\rho_S\sqrt{\Delta P}}{A_F^{-2}b_O^{-1}\mu V_N\beta_N}-8\dfrac{t'A_F^3(1-\varepsilon_O)^2\rho_S^2}{b_O^{-2}\mu V_N^2\beta_N^2}\mathrm{Ln}\left\lvert 2\dfrac{t'\mu}{A_F}+\dfrac{\mu V_N\beta_N\sqrt{\Delta P}}{b_O A_F^2(1-\varepsilon_O)\rho_S}\right\rvert$
2/3	$\dot{V}=9\dfrac{(1-\varepsilon_O)\rho_S\sqrt[3]{\Delta P}}{A_F^{-2}b_O^{-1}\mu V_N\beta_N}-\dfrac{9\sqrt{3}\sqrt{t'\mu A_F^{-1}}}{\sqrt{\left(\dfrac{b_O^{-1}\mu V_N\beta_N}{A_F^2(1-\varepsilon_O)\rho_S}\right)^3}}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\dfrac{A_F^{-1}b_O^{-1}V_N\beta_N}{t'(1-\varepsilon_O)\rho_S}}\sqrt[3]{\Delta P}\right)$
1/3	$\dot{V}=\dfrac{9}{4}\dfrac{(1-\varepsilon_O)\rho_S\sqrt[3]{\Delta P^2}}{A_F^{-2}b_O^{-1}\mu V_N\beta_N}-\dfrac{27}{4}\dfrac{t'(1-\varepsilon_O)^2\rho_S^2\sqrt[3]{\Delta P}}{A_F^{-3}b_O^{-2}\mu V_N^2\beta_N^2}+\dfrac{81}{8}\dfrac{t'^2(1-\varepsilon_O)^3\rho_S^3}{A_F^{-4}b_O^{-3}\mu V_N^3\beta_N^3}\mathrm{Ln}\left\lvert 3\dfrac{t'\mu}{A_F}+\dfrac{2\mu V_N\beta_N\sqrt[3]{\Delta P}}{b_O A_F^2(1-\varepsilon_O)\rho_S}\right\rvert$

Meaning of symbols

R	total resistance of the porous medium	$[N \cdot s/m^5]$
ΔP	pressure drop	$[N/m^2]$
t'	average resistance of the filtration mesh	$[m^{-1}]$
μ	dynamic viscosity factor of the suspension	$[N \cdot s/m^2]$
A_F	deposit area	$[m^2]$
b_O	sediment constant	$[N]$
s_O	sediment compressibility factor	[-]
V_N	feed volume	$[m^3]$
β_N	inflow density of the solid phase	$[kg/m^3]$
ε_O	sediment porosity	[-]
ρ_S	retained solid phase density	$[kg/m^3]$
L	sediment thickness	$[m]$
α	proper resistance of the sediment	$[N \cdot s/m^4]$
K	permeability factor	$[m^2]$
$\dot{V}$	volumetric delivery	$[m^3/s]$

Literatura

1. **Anielak A. M, Piecuch. T.:** *Analityczno-empiryczne kryterium filtracji ciśnieniowej i odśrodkowej zawiesiny poflotacyjnych odpadów cynku i ołowiu*. Archiwum Górnictwa PAN. Tom 29. Nr 3 (1984).
2. **Anielak A. M, Piecuch. T.:** *Vergleich der Entwässerung bei Druck Und Zentrifugalfiltration mit Statistischen Modellen*. Chemische Technik. Nr 3, (1987).
3. **Anielak A. M, Piecuch. T.:** *Vielstufige Druck Filtration. 17 Diskusionstagung Mechanische Flussigkeitabtronaug*. Drezden, 1980,
4. **Ciborowski. J.:** *Inżynieria chemiczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1965.
5. **Dahlstrom D. A., Nickolaus N.:** *Theory and practice of continuous pressure filtration*. Chemical Engineering Progress, Nr 3 (1956).
6. **Grace H. P.:** *Resistance of compressibility of filter cakes*. Chemical Engineering Progress, Part I, II, No. 6, 7 (1953).
7. **Hertjess P. M.:** *Industrial filtration*. Department Of Chemical Engineering. Technical University Delf (1948)
8. **Hertjess P. M., Haas H.:** *Studies in filtration Recueil Trav*. Chim. Pays-Bas. Nr 6 (1946).
9. **Ives K. J.**: *New concepts in filtration*. Water and Water Engineering. Nr 8 (1961).

10. **Kocurek J., Palica M.:** *Rozdzielanie zawiesin ciał stałych w cieczach na drodze filtracji z kompresją tworzonego osadu. Teoretyczny opis filtracji z równoczesną kompresją osadu.* Part 1, Annual Set The Environment Protection (Rocznik Ochrona Środowiska), 4, (2002), part 2, Annual Set The Environment Protection (Rocznik Ochrona Środowiska), 5 (2003).
11. **Koppiz K.:** *Untersuchungen über die Anwendbarkeit der Filterteorie auf die Steinkohle-Filterarbeit.* Teil 1. Aufbereitungs-Technik. nr 9 (1970).
12. **Koppiz K.:** *Untersuchungen überdies Anwendbarkeit der Filterteorie auf die Steinkohle-Filterarbeit.* Teil 2. Aufbereitungs-Technik. nr 12 (1970).
13. **Le Lec P.:** *Variatons de permeabilite des gateax de filtration.* Genie Chimique Nr 3 (1962).
14. **Luckert K.:** *Bewertung einer Apparatkombination.* Doktorat Dissertation Technische Hochschule. Magdeburg (1973).
15. **Malatyńska G.:** *Przekształcenia całkowe i rachunek operatorowy.* Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, 2001
16. **Orlicek A. F.:** Les principes physiques dela filtration. Genie Chimique. Nr 6 (1956).
17. **Palica M., Grotek A.:** *Opis odwadniania zawiesiny zrzutowej po wirówce filtracyjno-sedymentacyjnej BIRDa modelem SORENSENA.* Rocznik Ochrona Środowiska (Annual Set The Environment Protection), 9 (2007).
18. **Palica M., Pęczek K., Kurowski Ł., Niemirowski J.:** *Periodyczna filtracja wirowa zawiesiny zrzutowej po wirówkach BIRDa zawierającej dodatek flokulantu MAGNAFLOC 336.* Annual Set The Environment Protection (Rocznik Ochrona Środowiska), 10 (2010).
19. **Palica M., Gierczycki A., Lemanowicz M.:** *Własności filtracyjne zawiesiny po wirówkach DECANTER po dodaniu flokulantu MAGNAFLOC 919.* Annual Set The Environment Protection (Rocznik Ochrona Środowiska), 11 (2009).
20. **Palica M., Wątor K., Thullie J., Kurowski Ł.:** *Odwadnianie szlamu węglowego na drodze periodycznej filtracji wirowej.* Rocznik Ochrona Środowiska (Annual Set The Environment Protection), 12 (2010).
21. **Palica M., Spyrka W., Adamczyk M.:** *Testy filtracji ciśnieniowej zawiesiny odpadowej z odmulnika DORRa.* Rocznik Ochrona Środowiska (Annual Set The Environment Protection), 13 (2011).
22. **Palica M., Kocurek J.:** *Wybrane zagadnienia teorii filtracji i kompresji osadów.* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej. Gliwice, 2001.
23. **Piecuch T.:** *Badania efektywności procesu filtracji mułów węgli surowych w świetle doświadczeń.* Praca doktorska. Politechnika Śląska. Gliwice, 1972.
24. **Piecuch T.:** *Analityczno-empiryczny model procesu filtracji próżniowej zawiesin mułów węglowych.* Monografia habilitacyjna. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria Górnictwo. Nr 65 (1975).

25. **Piecuch T.:** *Analiza teoretyczna przepływu medium przez modelowe wirówki sitowe*. Monografia. Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Nauk o Ziemi, 1984.
26. **Piecuch T.:** *Studium teoretyczne procesu filtracji grawitacyjnej*. Monografia. Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Nauk o Ziemi, 1984.
27. **Piecuch T.:** *Równanie czasu przepływu rotacyjnego ścieku przez wirówkę filtracyjną*. Archiwum Ochrony Środowiska PAN, Nr 3–4 (1985).
28. **Piecuch T.:** *Równanie Darcy jako podstawa analizy teoretycznej szczególnych przypadków procesu filtracji*. Rocznik Ochrona Środowiska (Annual Set The Environment Protection), 11 (2009).
29. **Piecuch T.:** *Technika wodno-mułowa. Urządzenia i procesy*. Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, 2007.
30. **Piecuch T.:** *Technika hydroszlamowa*. Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, 1994.
31. **Piecuch T.:** *Technika wodno-mułowa. Urządzenia i procesy*. Państwowe Wydawnictwo Naukowo-Techniczne. Warszawa, 2010.
32. **Piecuch T., Anielak A. M.:** *Technika i technologia ścieków przemysłowych*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 1982.
33. **Piecuch T., Opiełka A.:** *Technologiczne badania pracy prasy filtracyjnej typu ROW*. Zeszyty Naukowe AGH. Nr 574, Seria Górnictwo, 1976.
34. **Piecuch T., Piekarski J.:** *Badania procesu filtracji ciśnieniowej zawiesiny poprodukcyjnej z Zakładu Przetwórstwa Drewna Polspan-Kronospan*. Monografie Komitetu Inżynierii środowiska PAN, Vol. 11 (2003).
35. **Piecuch T., Sówka J.:** *Stan badań teoretycznych i praktycznych nad procesem filtracji zawiesin*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Nr 403. Seria Górnictwo, Gliwice, 1974.
36. **Piecuch T.:** *Badania procesu filtracji ciśnieniowej poflotacyjnych koncentratów miedzi*. Rudy i Metale Nieżelazne. Nr 10 (1978).
37. **Piecuch T.:** *Badania procesu filtracji ciśnieniowej poflotacyjnych odpadów rud miedzi*. Rudy i Metale Nieżelazne. Nr 12 (1978).
38. **Piecuch T.:** *Hipoteza możliwości wspólnego zapisu procesu filtracji i sedymentacji jako równania pędu*. Zeszyty Naukowe Politechniki Koszalińskiej. Seria Inżynieria Środowiska, Nr 12 (1988).
39. **Piecuch T.:** *Podstawy sedymentacyjnej teorii procesu filtracji*. Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej. Seria Nauki Podstawowe. Nr 21 (1980).
40. **Piecuch T., Piekarski J., Malatyńska G.:** *The Equation Describing The Filtration Process With Compressible Sediment Accumulation On A Filter Mesh*. Archives of Environmental Protection, No 3 (2013).
41. **Piekarski J.:** *Wybrane przykłady obliczeń komputerowych zastosowanych w inżynierii środowiska*. Podręcznik. Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, 2003.

42. **Piekarski J, Malej J.:** *Wykorzystanie techniki komputerowej do projektowania i eksploatacji wysoko sprawnych oczyszczalni ścieków*. Podręcznik. Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, 2005.
43. **Piekarski J.:** *Metody numeryczne w modelowaniu przebiegu procesu sorpcji*. Monografia. Wydawnictwo Komisji Ekosfery PAN. Oddział Gdańsk, 2008.
44. **Piekarski J.:** *Numeryczne modelowanie procesu filtracji i sorpcji. Monografia habilitacyjna*. Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, 2009.
45. **Piekarski J.:** *Analiza wybranych parametrów kolmatacji w procesie filtracji grawitacyjnej*. Rocznik Ochrona Środowiska (Annual Set The Environment Protection), 11, (2009).
46. **Piekarski J., Dąbrowski T.:** *Numerical method for assessment of sorption process of contaminants from wastewater*. Mineral Resources Management, 25 (2009)
47. **Piekarski J., Dąbrowski T.:** *Investigations on colmatation during filtration process on the porous deposit*. Polish Journal of Environmental Studies, 2009.
48. **Piekarski J.:** *Colmatation blockage during gravitational filtration process of coal suspension on sand bed*. Mineral Resources Management. Vol. 25, (2009).
49. **Piekarski J.:** *Zastosowanie metod numerycznych do modelowania procesu filtracji grawitacyjnej*. Rocznik Ochrona Środowiska (Annual Set The Environment Protection), 12 (2011).
50. **Sidełko R., Chmielińska-Bernacka A.:** *Application of compact reactor for methane fermentation of municipal waste*. Rocznik Ochrona Środowiska (Annual Set The Environment Protection). 15 (2013).
51. **Suttle H.K.:** *Filtration*. Chemical Process Engineering. Nr 8 (1962).
52. **Suttle H.K.:** *Filtration. Advances in filtration in the theoretical and practical fields*. Chemical Process Engineering. Nr 2 (1960).
53. **Suttle H.K., Tiller F.M.:** *Filtration theory today*. Chemical Engineering Progress. Nr 6 (1966).
54. **Tiller F.M.:** *Numerical methods for constant pressure filtration based on Kozeny'a low*. Lamar State College of Technology Beaumont Texas Chemical Engineering Progress. Nr 9 (1953).
55. **Tiller F.M.:** *The role of porosity in filtration. Analytic Equations for Constant Rate Filtration*. Chemical Engineering Progress. Nr 6 (1955).
56. **Zużikow W.A.:** *Zakonomiernosti filtrowania pri rozdielenij rassłaiwajuszczichsja suspienzji na filtrie*. Chemiczieskaja Promyszlennost. Nr 4. (1960).
57. **Zużikow W.A.:** *Filtracja. Teoria i praktyka rozdzielania zawiesin*. Tłumaczenie z j. rosyjskiego WNT. Warszawa, 1985.

Filtracja mieszanin tworzących osady ściśliwe

Streszczenie

W niniejszej publikacji, rozpatrzono od strony teoretycznej proces filtracji mieszaniny cieczy i ciała stałego napływającej na siatkę filtracyjną. Ten rodzaj procesu filtracji jest charakterystyczny dla urządzeń filtracyjnych takich jak: filtry próżniowe, prasy filtracyjne oraz filtry ciśnieniowe w mniejszym stopniu wirówki filtracyjne [10, 17–22, 25–27].

Bazą rozważań jest więc ogólny zapis według równania (10) przedstawiony dla procesu filtracji z tworzeniem osadu ściśliwego na siatce filtracyjnej przy uproszczonym założeniu, że cała objętość zawiesiny (V_N) nadana do procesu filtracji, przykładowo próżniowej lub ciśnieniowej [1–3, 23, 24, 33–39] zostanie zatrzymana na siatce filtracyjnej ($V_N\beta_N$), a więc zagęszczenie filtratu będzie równe zero. Zatem równanie (10) przyjmie postać (11).

W równaniu tym, jak wyżej, przyjmijmy dla uproszczenia wywodu matematycznego pewne nowe stałe, a mianowicie, zapiszmy stałą A w postaci (12).

Następnie stałą B określmy według zapisu (13) (13), oraz stałą C ujmijmy według zapisu (14).

Biorąc pod uwagę powyższe uproszczenia można przedstawić rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (11) procesu filtracji ze zmiennym ciśnieniem w postaci całki (15).

Rozpatrzmy poszczególne przypadki rozwiązania całki zapisanej równaniem (15).

Dla B=1 całka przyjmie postać (16).

Dla B=0,5; $x^B= x^{0,5}=\sqrt{x}$, całka (15) ma postać (17)

Podstawiając $\sqrt{x}=t$, mamy $x=t^2$, a stąd dx=2tdt, i tym sposobem całkę (17) z funkcji niewymiernej sprowadzamy do całki z funkcji wymiernej j (18)

Funkcję podcałkową f(t), która jest funkcją wymierną niewłaściwą przedstawiamy w postaci (19) i całkując obustronnie otrzymujemy (20).

Ostatecznie uwzględniając wynik (20) w całce (18) i wracając do wyjściowej zmiennej x otrzymamy, że całka wyraża się wzorem (21).

W szczególności, jeśli dolna granica całkowania jest ustalona i wynosi a=0, natomiast górna granica całkowania jest zmienna, to otrzymamy rozwiązanie równania filtracji w postaci (22).

Dla B=2/3; $x^B=x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}$ całka (15) ma postać (23).

Poprzez podstawienie $\sqrt[3]{x}=t$, mamy $x=t^3$, $dx=3t^2dt$, i całkę z funkcji niewymiernej (23) sprowadzamy do całki z funkcji wymiernej (24).

Całkę tego typu oblicza się przedstawiając funkcję podcałkową f(t), która jest funkcją wymierną niewłaściwą, w postaci (25).

Uwzględniając rozkład (25) w całce (24) i korzystając ze wzoru (26), otrzymamy (27).

Uwzględniając ten wynik we wzorze (24) oraz wracając do podstawienia $t=\sqrt[3]{x}$ otrzymamy ostatecznie, że całka (23) wyraża się wzorem (28).

W szczególności, jeżeli dolna granica całkowania jest ustalona i wynosi a=0, natomiast górna granica całkowania jest zmienna, to otrzymamy ogólne rozwiązanie równania filtracji wg zapisu (29).

Dla B=1/3; $x^B=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ całka (15) ma postać (30).

Poprzez podstawienie $\sqrt[3]{x}=t$, mamy $x=t^3$, oraz $dx=3t^2dt$ i całkę (30) sprowadzamy do całki funkcji wymiernej postaci (31).

Funkcja podcałkowa f(t) jest funkcją wymierną niewłaściwą, a więc dzieląc licznik przez mianownik przedstawiamy ją w postaci (32).

Uwzględniając rozkład (32) w całce (31) i całkując obustronnie otrzymamy, że całka stojąca po prawej stronie ma postać (33).

Następnie wracając do wyjściowej zmiennej tj. do podstawienia $t=\sqrt[3]{x}$ otrzymamy, całkę ogólną postaci (34).

W szczególności, jeżeli dolna granica całkowania jest ustalona i wynosi a=0, natomiast górna granica całkowania jest zmienna, to dla B=2/3 całkę (30), wyrażamy za pomocą funkcji (35).

Z przeprowadzonej analizy teoretycznej wynikają pewne ogólne wnioski dla badaczy procesu filtracji – w tym przypadku procesu filtracji przez siatkę filtracyjną z tworzeniem osadu ściśliwego w trakcie trwania procesu na tej siatce. Otóż:

- nie można ustalić jednakowej formuły ogólnego równania filtracji takiego, w którym wystąpi parametr ściśliwości osadu w ogólnym zapisie fizykalnym (tutaj $B=s_O$), do którego to równania będzie można podstawiać wprost dowolne wartości współczynnika ściśliwości s_O, w granicach pomiędzy wartością zero oraz jeden i określać przepływ medium przez taką przegrodę porowatą – tu siatkę filtracyjną,
- w przypadku procesu filtracji z tworzeniem osadów ściśliwych na siatce filtracyjnej – chcąc korzystać z ogólnego zapisu równania różniczkowego filtracji, należy je każdorazowo najpierw rozwiązać poprzez całkowanie podstawiając najpierw do tego równania, konkretną wartość współczynnika ściśliwości ($s_O=B$). Końcowe fizykalne zapisy tych rozwiązań, dla wybranych współczynników ściśliwości s_O przedstawiono w tablicy 1,
- przed ewentualnym wykorzystaniem ogólnego równania różniczkowego filtracji, jako równania wyjściowego, na podstawie którego chcemy wyliczyć przepływ (wydatek objętościowy) należy najpierw ustalić wartość stałej b_0 z zapisu empirycznego (5) dla określenia wartości parametru przepuszczalności K; a więc parametru przepuszczalności, który musi być znany,

- wyznaczenie wartości współczynników stałych, które występują w zapisie ogólnego równania filtracji (11) (a więc t', b_0) będzie przedmiotem badań Autorów publikacji dla konkretnych, typowych mieszanin, które można spotkać w bieżącej praktyce inżynierskiej i będzie przedmiotem kolejnych publikacji Autorów jako dalszy ciąg badań podstawowych nad procesem filtracji,
- przeprowadzona powyżej analiza teoretyczna procesu filtracji osadów ściśliwych wskazuje jednoznacznie, że wykorzystywanie w praktyce ogólnego równania różniczkowego procesu filtracji poprzez jego rozwiązanie, tj. całkowanie, przy założonej (a więc w praktyce znanej wartości współczynnika ściśliwości s_O=B) jest jednak bardzo trudne i skomplikowane, a tym samym nie rokuje pozytywnych perspektyw bieżącego wykorzystywania przez projektantów tego równania.